CHAPITRE 5 : Filtrage linéaire

Les filtres sont destinés à sélectionner certaines bandes de fréquence d'un signal. Ils modifient l'amplitude et/ou la phase des composantes spectrales du signal. Ce sont généralement des circuits linéaires, dans la mesure où ils n'introduisent aucune nouvelle fréquence.

Les filtres sont très utilisés dans de nombreux domaines des techniques électroniques. Citons par exemple :

- ✓ radiocommunications ou télécommunications : pour délimiter le plus parfaitement possible certaines bandes de fréquences et rejeter certaines autres.
- ✓ traitement du signal : utilisation en analyse spectrale du signal (en particulier pour extraire du bruit).
- ✓ électronique analogique

Un filtre en électrocinétique ne laissera passer que certains signaux sinusoïdaux caractérisés par une pulsation ω. À l'entrée du filtre on applique par exemple une tension de pulsation ω, si à la sortie du filtre la tension n'est pas trop atténuée, on considère que le filtre laisse passer la pulsation ω ; si au contraire, la tension est très atténuée, on considère que le filtre ne laisse pas passer la pulsation ω.

1. Description des signaux sinusoïdaux

1.1. Ecriture d'un signal sinusoïdal

- On définit la valeur moyenne S_{moy} et la valeur efficace S_{eff} d'un signal périodique $S(t)$ par les relations suivantes :

$$\boxed{S_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt} \qquad \boxed{S_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T S^2(t)dt}$$

- La valeur efficace S_{eff} d'un signal sinusoïdal $S(t)$ d'amplitude S_0 vaut :

$$\boxed{S_{eff} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}}$$

1.2. Analyse de Fourier d'un signal sinusoïdal

- L'étude des signaux sinusoïdaux revêt un grand intérêt, car un signal périodique quelconque de fréquence f_0 peut toujours être décomposé en une somme (finie ou infinie) de signaux sinusoïdaux de fréquence f_n (n est un entier naturel) appelée série de Fourier. Dans ce développement :

- la fréquence $f_1 = f_0$ correspond au **fondamental** ou premier harmonique $(n = 1)$;
- la fréquence $f_n = nf_0$ correspond à **l'harmonique d'ordre** $(n > 1)$.

- Mathématiquement on peut écrire le signal $S(t)$, de période T sous la forme d'une serie :

$$\boxed{\boldsymbol{S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \qquad \text{avec } \omega = 2\pi f}}$$

Les coefficients a_n et b_n sont réels et peuvent être calculés à partir des expressions suivantes :

$$\boxed{\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(n\omega t)\,dt}} \quad \text{et} \quad \boxed{\boldsymbol{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin(n\omega t)\,dt}}$$

a_0 représente la valeur moyenne du signal $S(t)$.

Cette décomposition signifie que les fonctions $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$ constituent une base orthogonale de l'espace des fonctions considérées, vérifiant pour n et m entiers :

$$\forall\, n, m, \qquad \int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = 0$$

$$\forall\, n \neq m, \qquad \int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = 0$$

$$\forall\, n \neq 0, \qquad \int_0^T \cos^2(n\omega t)\,dt = \int_0^T \sin^2(n\omega t)\,dt = \frac{T}{2}$$

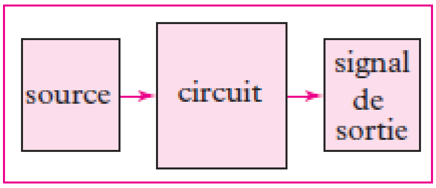
- On démontre qu'il existe une relation simple entre le carré de la valeur efficace d'un signal périodique, S_{eff}^2 et les carrés des coefficients de la série de Fourier du signal :

$$\boxed{\boldsymbol{S_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n^2 + b_n^2]}}$$

2. Fonction de transfert d'un quadripôle

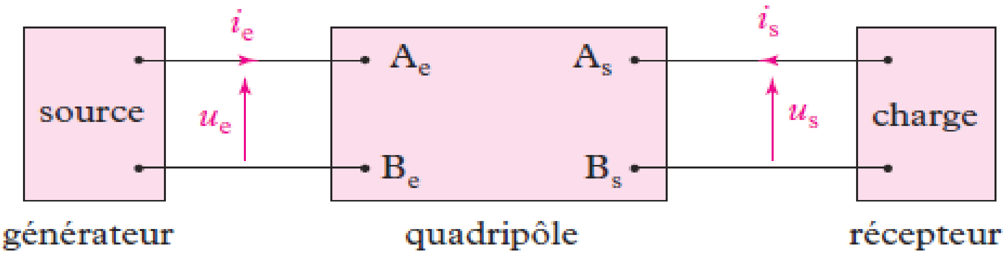
Pour utiliser un circuit électrique, nous branchons celui-ci sur une source de tension. Afin d'obtenir la réponse du circuit, nous nous intéressons à la tension aux bornes d'un élément du circuit.

2.1. Dipôles et quadripôles



• Un **dipôle** est un composant ou un circuit caractérisé par deux bornes. La caractéristique du dipôle relie l'intensité i circulant dans celui-ci à la tension u à ses bornes.

• Un **quadripôle** est une portion de réseau reliée à l'extérieur par quatre bornes : deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Il est caractérisé par quatre variables : la tension u_e et le courant i_e d'entrée, ainsi que la tension u_s et le courant i_s de sortie. Le montage le plus simple consiste à relier les bornes d'entrée A_e et B_e à un générateur (ou source) et les bornes de sortie A_s et B_s à un récepteur (ou charge).



Un quadripôle est constitué de dipôles. Les caractéristiques de ces dipôles définissent les relations liant entre elles les grandeurs instantanées d'entrée u_e et i_e et les grandeurs instantanées de sortie u_s et i_s. Lorsque les relations ainsi obtenues sont linéaires, le quadripôle est dit linéaire. Si les dipôles constituant le quadripôle sont utilisés en fonctionnement linéaire, le quadripôle est linéaire. **Un quadripôle constitué de dipôles linéaires est linéaire.**

2.2. Fonction de transfert complexe

Un filtre est défini par sa fonction de transfert. Soit un réseau linéaire excité par une entrée sinusoïdale de pulsation ω. L'entrée notée $e(t)$ qui peut être un courant ou une tension provoque une réponse forcée du réseau. Nous notons $s(t)$ cette réponse. On a donc :

$$e(t) = E\,cos(\omega t + \varphi_e)$$

$$s(t) = S\,cos(\omega t + \varphi_s)$$

$$e(t) = E\,cos(\omega t + \varphi_e) \Longrightarrow \underline{e}(t) = Ee^{j(\omega t+\varphi_e)} = Ee^{j\varphi_e}e^{j\omega t} = \underline{E}e^{j\omega t}$$

$$s(t) = S\,cos(\omega t + \varphi_s) \Longrightarrow \underline{s}(t) = Se^{j(\omega t+\varphi_s)} = Se^{j\varphi_s}e^{j\omega t} = \underline{S}e^{j\omega t}$$

La fonction de transfert est définie par :

$$\boxed{\boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \Longrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}e^{j\omega t}}{\underline{E}e^{j\omega t}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{Se^{j\varphi_s}}{Ee^{j\varphi_e}} = \frac{S}{E}e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{S}{E}e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = |\underline{H}(j\omega)|e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = |\underline{H}(j\omega)|e^{j\varphi} = G(\omega)e^{j\varphi}$$

Le module ou encore le gain de la fonction de transfert est donc :

$$\boxed{\boldsymbol{G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{S}{E}}}$$

Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée :

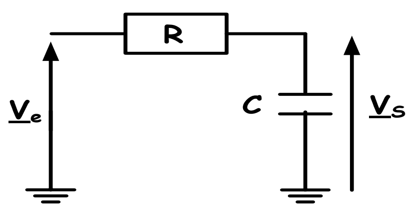
$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{arg\underline{H}(j\omega) = \varphi = \varphi_s - \varphi_e} \\ \boldsymbol{-\pi < \varphi \leq \pi}\end{array}}$$

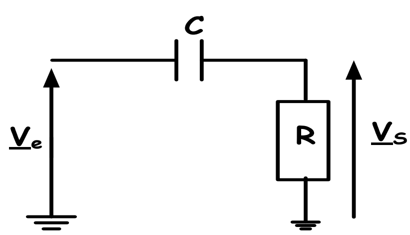
- ✓ $\underline{H}(j\omega)$ est une fonction rationnelle (rapport de 2 polynômes à coefficients réels)
- ✓ On se limite à la fonction de transfert en tension.
- ✓ L'étude du module et de l'argument de la fonction de transfert donnera des informations utiles pour prévoir la réponse du système dans d'autres conditions d'excitation.
- ✓ Expérimentalement

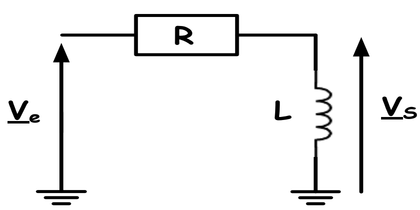
$$\boldsymbol{|\underline{H}(j\omega)| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{U_s}{U_e}}$$

Exercice d'application

Déterminer la fonction de transfert pour les circuits suivants :







3. Ordre d'un filtre

La fonction de transfert complexe peut toujours s'écrire comme le rapport de 2 polynômes en $j\omega$:

$$\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \frac{\underline{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{j\omega})}{\underline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{j\omega})}$$

Pour des raisons de stabilité du filtre, le degré du polynôme $\underline{N}(j\omega)$ au numérateur de la fonction de transfert est inférieur ou égal au degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ au dénominateur. On appelle ordre du filtre le degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ situé au dénominateur de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$.

Remarque: En associant plusieurs cellules RC, on obtient des filtres plus efficaces sur le plan de la sélectivité. Par contre, le filtre introduit une atténuation plus élevée. L'ordre d'un filtre est le nombre d'éléments réactifs (condensateurs, selfs) du filtre.

Application : la fonction de transfert du filtre RC est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert est : $\underline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{j\omega}) = 1 + jRC\omega$. C'est un polynôme du premier ordre en $j\omega$: le filtre est donc du premier ordre.

4. Diagramme de Bode

4.1. Gain G_{dB} de la fonction de transfert

Le gain $\boldsymbol{G_{dB}}$ de la fonction de transfert (en dB) est définie par :

$$\boxed{\boldsymbol{G_{dB} = 20\log\left|\underline{H}(j\omega)\right|}}$$

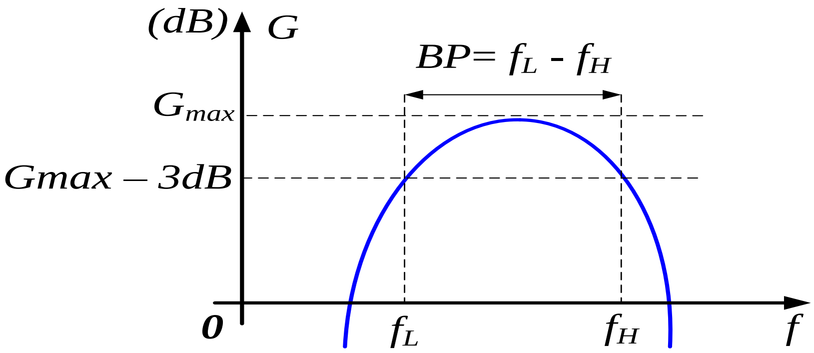
- ✓ log représente le logarithme décimal : $\log_{10}(10^n) = n\log_{10}10 = n$. La quantité calculée augmente de 1 chaque fois qu'on multiplie par 10.
- ✓ G est en decibel (dB) tel que $1B = 10\ dB$, B étant le symbole du Bel
- ✓ $G_{dB} > 1$: le filtre est amplificateur
- ✓ $G_{dB} < 1$: le filtre est atténuateur
- ✓ $G_{dB} = 1$: le filtre est passeur.

4.2. Fréquence de coupures à $-3\ dB$

Les fréquences de coupure dites à $-3dB$ sont celles pour lesquelles le gain G du filtre est inférieur à sa valeur maximale de pratiquement $3dB$. Plus exactement, **les fréquences de**

coupure dites à $-3dB$ sont les fréquences pour lesquelles le module $H = |\underline{H}(j\omega)|$ de la fonction de transfert est égal au module maximal divisé par $\sqrt{2}$. Ce qui correspond à la puissance maximale du signal divisée par 2. Soit :

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{|\underline{H}(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}}$$



$$G_{max} = 20 \log H_{max}$$

$$20 \log \frac{|\underline{H}(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} \cong G_{max} - 3dB$$

- ✓ f_L = fréquence de coupure basse à $-3dB$
- ✓ f_H = fréquence de coupure haute à $-3dB$
- ✓ $BP = f_H - f_L$: c'est la bande passante à $-3dB$. Elle est définie comme le domaine des fréquences pour lesquelles le gain reste supérieur au gain maximal moins $3dB$.

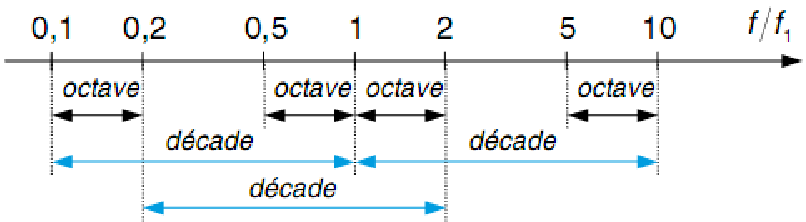
4.3. Octave-décade

- ➢ Une octave est l'intervalle entre 2 fréquences f_1 et f_2 tel que $f_2 = 2f_1$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle a pour longueur log(2). En effet :

$$\log(2f) - \log(f) = \log(2)$$

- ➢ Une décade est l'intervalle entre 2 fréquences f_1 et f_2 tel que $f_2 = 10f_1$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle est l'intervalle de longueur 1 (intervalle unité). En effet :

$$\log(10f) - \log(f) = \log(10) = 1$$



- Pente d'une droite : dans la représentation du gain en tension en fonction de $\log(f)$, la pente d'une droite est calculée en dB/décade.

4.4. Diagramme de Bode

C'est une représentation en échelle logarithmique. **C'est le tracé de deux courbes** :

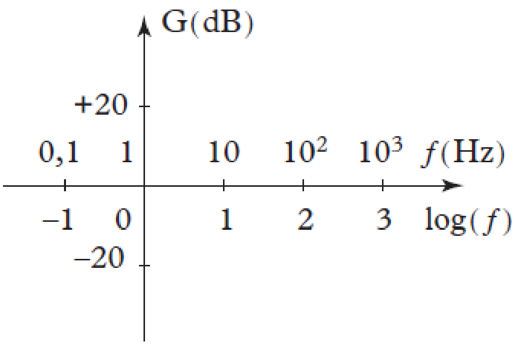
- Le gain $\boldsymbol{G_{dB}}$ de la fonction de transfert complexe en fonction du logarithme décimal de la fréquence ou de la pulsation (échelle logarithmique) :

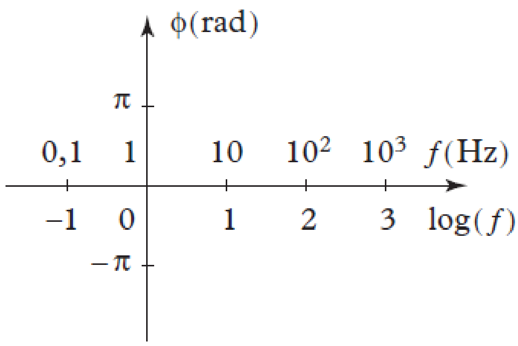
$$\boxed{\boldsymbol{G_{dB} = f\left[\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]}}$$

- Le déphasage φ de la fonction de transfert complexe en fonction du logarithme décimal de la fréquence ou de la pulsation (échelle logarithmique) :

$$\boxed{\boldsymbol{\phi = g\left[\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]}}$$

Le tracé se fait sur du papier semi-logarithmique.





Remarque: le diagramme de Bode du produit de deux fonctions de transfert est la somme des diagrammes de Bode pour chaque fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H_1}(j\omega).\underline{H_2}(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} 20\log_{10}\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 20\log_{10}\left|\underline{H_1}(j\omega)\right| + 20\log_{10}\left|\underline{H_2}(j\omega)\right| \\ arg\underline{H}(j\omega) = arg\underline{H_1}(j\omega) + arg\underline{H_2}(j\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{G_{dB} = G_{1_{dB}} + G_{2_{dB}}} \\ \boldsymbol{\phi = \phi_1 + \phi_2} \end{cases}}$$

5. Équation différentielle déduite de la fonction de transfert

On peut déduire l'équation différentielle d'un système du premier ordre en remplaçant chaque terme $j\omega$ par l'opérateur $\dfrac{d}{dt}$ dans la fonction de transfert.

La forme générale de la fonction de transfert d'un filtre du premier ordre s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{N_0 + j\omega N_1}{D_0 + j\omega D_1}$$

d'où l'équation différentielle :

$$D_1 \frac{du_s}{dt} + D_0 u_s = N_1 \frac{du_e}{dt} + N_0 u_e$$

6. Filtres du 1^er^ ordre

6.1. Etude physique des filtres

On peut étudier physiquement la nature d'un filtre composé uniquement de composants usuels (R, L, C) en analysant leurs comportements aux basses fréquences (BF) et aux hautes fréquences (HF). Pour les dipôles fondamentaux (condensateurs, bobines) les comportements asymptotiques sont déterminés comme suit :

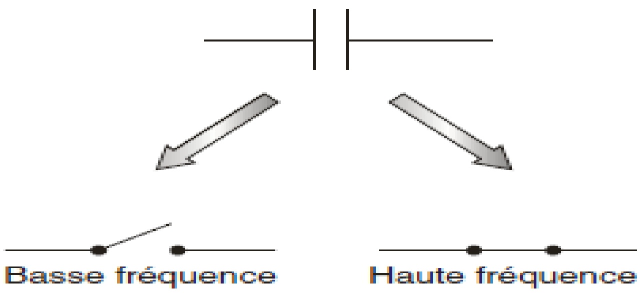
- **Condensateur**

  L'impédance du condensateur vaut :

$$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$$

  - Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z_C}| \longrightarrow \infty$
  - Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z_C}| \longrightarrow 0$

Le condensateur se comporte aux BF comme un interrupteur ouvert et aux HF comme un court-circuit (fil).



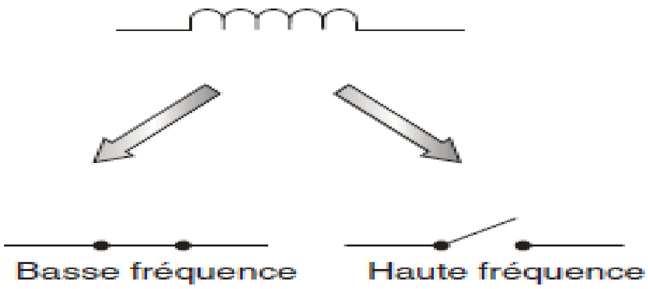
- **Bobine**

  L'impédance d'une bobine vaut :

$$\underline{Z_L} = jL\omega$$

  - Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z_L}| \longrightarrow 0$
  - Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z_L}| \longrightarrow \infty$

Une bobine se comporte aux BF comme un court-circuit (fil) et aux HF comme un interrupteur ouvert.



- **Résistance**

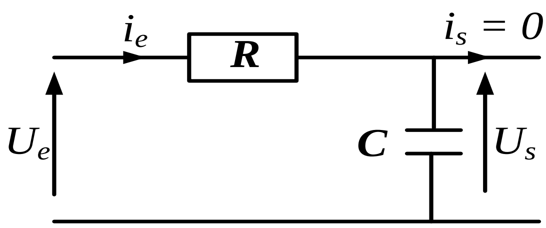
  Les résistances ne sélectionnent pas les fréquences à elles seules, mais permettent de définir les constantes de temps d'un circuit en limitant plus ou moins les courants. Les résistances donc, déterminent la fréquence à laquelle le filtre agira et son atténuation.

Tableau récapitulatif des comportements asymptotiques

Dipôle	***R***	***L***	***C***
Basses fréquences	*R*	fil	Interrupteur ouvert
Hautes fréquences	*R*	Interrupteur ouvert	fil

6.2. Filtre passe-bas du 1er ordre

On considère le circuit suivant :

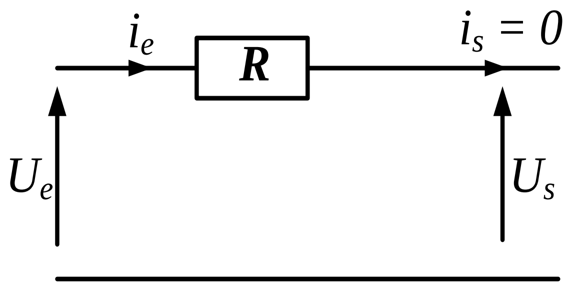


✓ **Comportement asymptotique**

L'impédance du condensateur vaut :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

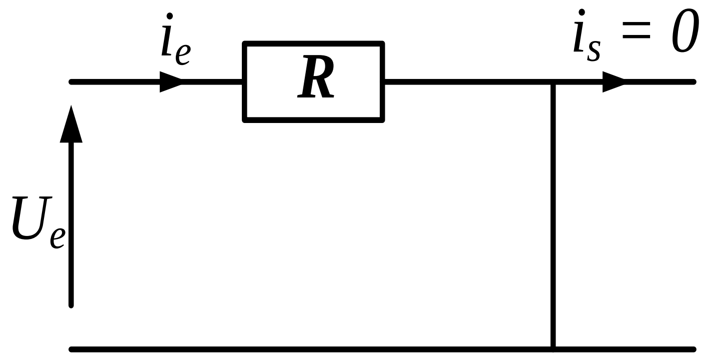
- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $\left|\underline{Z}_C\right| \longrightarrow \infty$ on a pour circuit équivalent :



Il vient donc :

$$\boxed{\underline{U}_s = \underline{U}_e}$$

- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow 0$ on a pour circuit équivalent :



Il vient donc :

$$\boxed{\underline{U}_s = 0}$$

On peut donc dire que le filtre transmet les signaux de basses fréquences et atténue ceux de hautes fréquences d'où la dénomination passe-bas.

✓ **Fonction de transfert**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

En posant $\omega_0 = 1/RC$, il vient :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

En introduisant la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ ou la fréquence réduite $x = f/f_0$, il vient :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jx}}$$

Plus généralement la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre est de la forme :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jx}}$$

Si $|H_0| > 1$ le filtre est nécessairement actif. Si $H_0 < 0$, il faut rajouter π à la phase.

✓ Diagramme de Bode

❖ Représentation de la courbe de gain

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

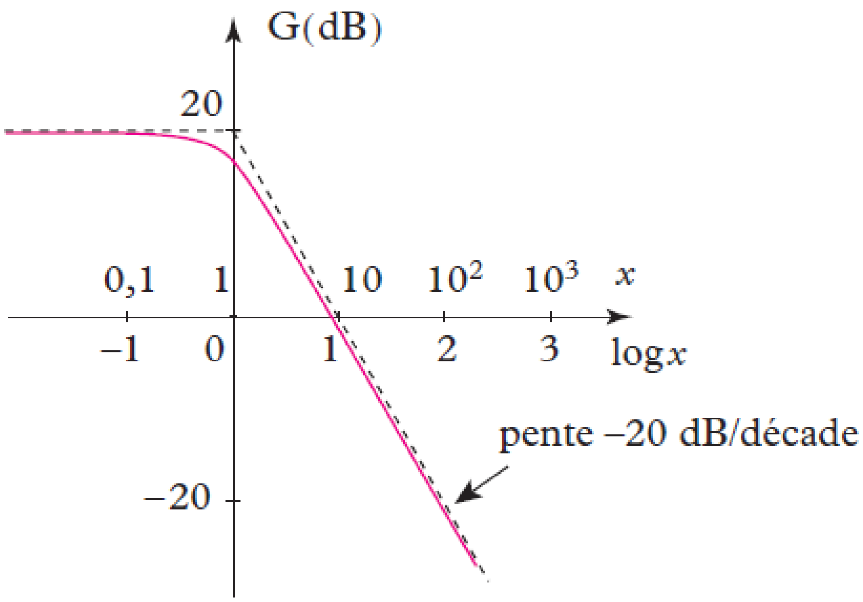
$$G_{dB} = 20\log_{10}|\underline{H}(j\omega)| \Rightarrow G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20\log_{10} 1 - 20\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2} = 0 - 10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{G_{dB} = -10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}}$$

On représente le gain en décibel non pas en fonction de ω/ω_0 mais en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$.

- Si $\omega \ll \omega_0$ alors $G_{dB} \cong 0$ on a donc une demi-droite confondue avec l'axe des abscisses
- Si $\omega \gg \omega_0$ alors $G_{dB} \cong -20\log_{10}(\omega/\omega_0)$ on a donc une droite de pente $-20\ dB$ par decade ce qui signifie que si ω est multiplié par 10, $\log_{10}(\omega/\omega_0)$ augmente de 1 et G_{dB} dimunie de 20 dB ou encore à chaque fois que l'on avance d'une décade, on descend de 20 dB.



- Les 2 asymptotes se coupent pour :

$$0 = -20\log_{10}(\omega/\omega_0) \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \omega_0}$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} H(\omega_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ G_{dB}(\omega_0) = 20\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}}\right) = 20\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\ dB \end{cases}$$

ω_0 est appelé pulsation de coupure à $-3\ dB$ et notée ω_C. La pulsation de coupure à $-3\ dB$ du filtre est par définition la pulsation telle que : $\boldsymbol{G_{dB}(\omega_c) = -3\ dB}$. C'est la limite entre le comportement BF et HF du filtre.

- Les signaux de pulsation $\boldsymbol{\omega < \omega_c}$ sont transmis en sortie avec une atténuation inférieure à $-3\ dB$.
- Les signaux de pulsation $\boldsymbol{\omega > \omega_c}$ sont transmis en sortie avec une atténuation supérieure à $3\ dB$.
- La bande passante de ce filtre c'est-à-dire l'ensemble des pulsations qu'il laisse passer est donc : $[0; \omega_0]$.

❖ Représentation de la courbe de phase

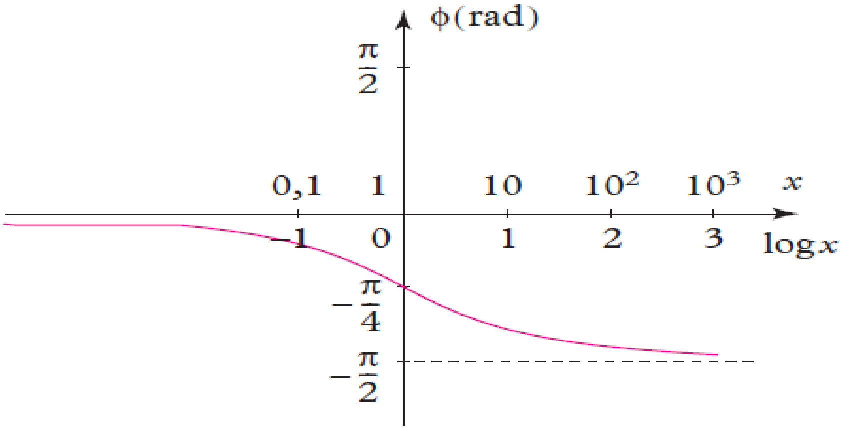
L'argument de la fonction de transfert est appelé phase.

$$\phi = arg\underline{H}(j\omega) = arg\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = arg\ (1) - arg\ \left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\phi = -arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

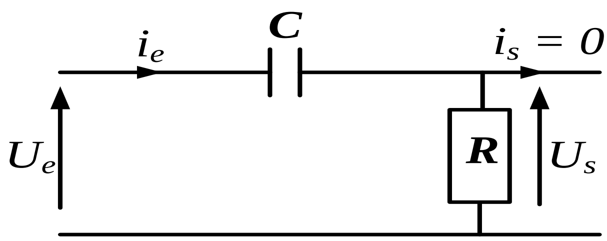
On représente l'argument en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$.

- Si $\ll \omega_0$, alors $\phi \cong 0$: on a donc une demi-droite confondue avec l'axe des abscisses
- Si $\omega \gg \omega_0$ alors $\phi \cong -\pi/2$: on a donc une demi-droite horizontale d'ordonnée $-\pi/2$
- Si $\omega = \omega_0$ alors $\phi \cong -\pi/4$



6.3. Filtre passe-haut du 1er ordre

On considère le circuit suivant :

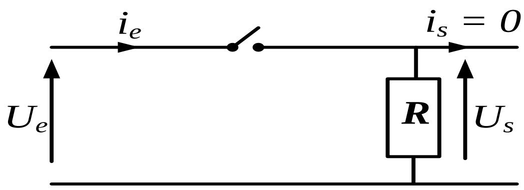


✓ **Comportement asymptotique**

L'impédance du condensateur vaut :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

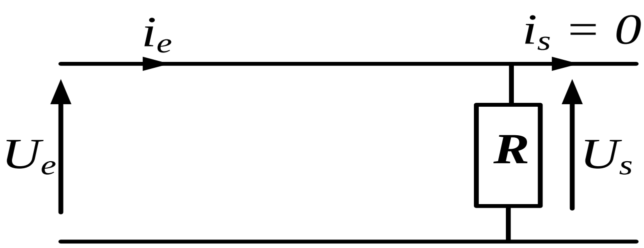
- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow \infty$ on a pour circuit équivalent :



Il vient donc :

$$\boxed{\underline{U}_s = 0}$$

- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow 0$ on a pour circuit équivalent :



Il vient donc :

$$\boxed{\underline{U}_s = \underline{U}_e}$$

On peut donc dire que le filtre transmet les signaux de hautes fréquences et atténue ceux de basses fréquences d'où la dénomination passe-haut.

- ✓ **Fonction de transfert**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

En posant $\omega_0 = 1/RC$, il vient :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

En introduisant la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ ou la frequence réduite $x = f/f_0$, il vient :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{jx}{1 + jx}}$$

Plus généralement la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre est de la forme :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0\frac{jx}{1 + jx}}$$

- ✓ **Diagramme de Bode**
  - ❖ **Représentation de la courbe de gain**

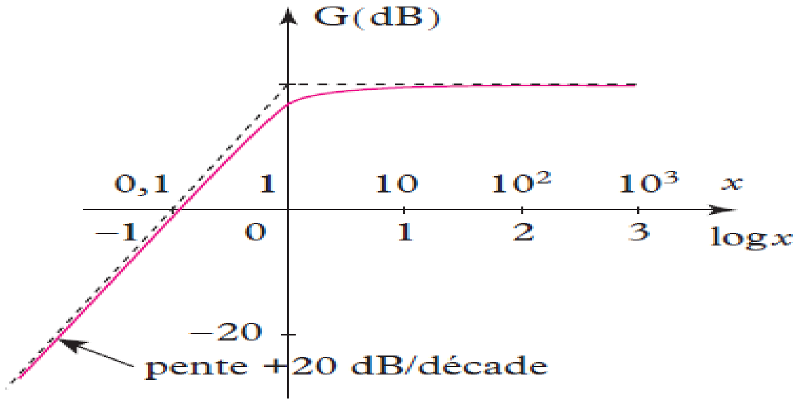
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \Longrightarrow H(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|\underline{H}(j\omega)\right| \Longrightarrow G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)$$

$$\Longrightarrow G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\boxed{G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

- Si $\omega \ll \omega_0$ alors $G_{dB} \cong 20\log_{10}(\omega/\omega_0)$ on a donc une droite de pente $20\,dB$ par décade ce qui signifie qu'on monte de $20\,dB$ lorsqu'on avance d'une decade ou encore lorsqu'on recule d'une décade, on descend de $20\,dB$.
- Si $\omega \gg \omega_0$ alors $G_{dB} \cong 0$ on a donc une demi-droite confondue avec l'axe des abscisses



- Les 2 asymptotes se coupent pour :

$$0 = 20\log_{10}(\omega/\omega_0) \Longrightarrow \boldsymbol{\omega = \omega_0 = \omega_C}$$

$$\omega = \omega_0 \Longrightarrow \begin{cases} H(\omega_0) = \dfrac{\frac{\omega_0}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\[2ex] G_{dB}(\omega_0) = 20\log_{10}\left(\dfrac{\frac{\omega_0}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}}\right) = 20\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\,dB \end{cases}$$

ω_0 est appelé pulsation de coupure à $-3\,dB$ et notée ω_C.

- La bande passante de ce filtre c'est-à-dire l'ensemble des pulsations qu'il laisse passer est donc :$[\omega_0;\infty[$.

❖ Représentation de la courbe de phase

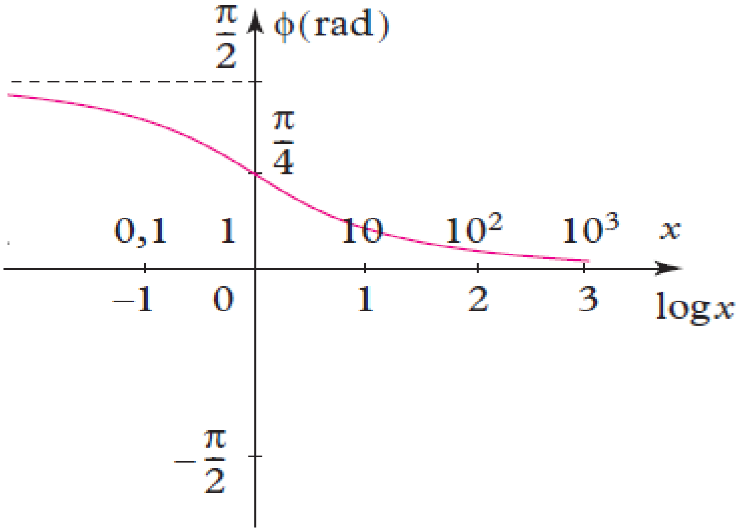
$$\phi = arg\underline{H}(j\omega) = arg\left(\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) - arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\phi = \frac{\pi}{2} - arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

- Si $\omega \ll \omega_0$, alors $\phi \cong \pi/2$: on a donc une demi-droite horizontale d'ordonnée $\pi/2$

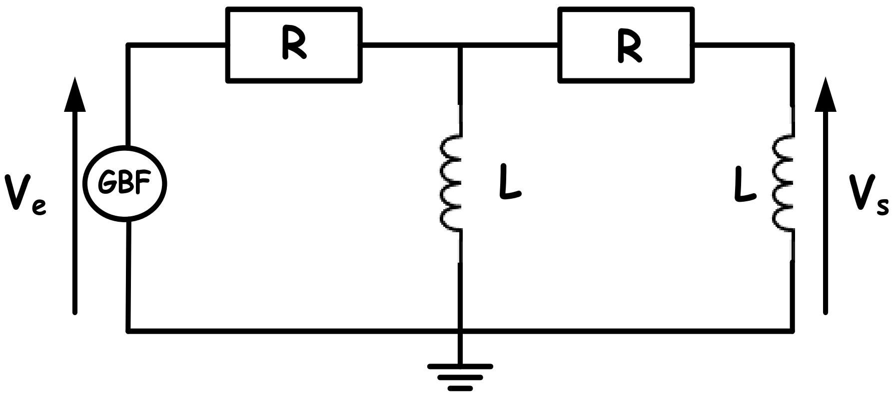
- Si $\omega \gg \omega_0$ alors $\phi \cong 0$: on a donc une demi-droite confondue avec l'axe des abscisses
- Si $\omega = \omega_0$ alors $\phi \cong \pi/4$

La courbe se déduit de celle du passe-bas par une translation de $\pi/2$.



Exercice d'application

On s'intéresse au quadripôle de la figure ci-dessous formé de deux cellules (R, L) enchainées, alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation,

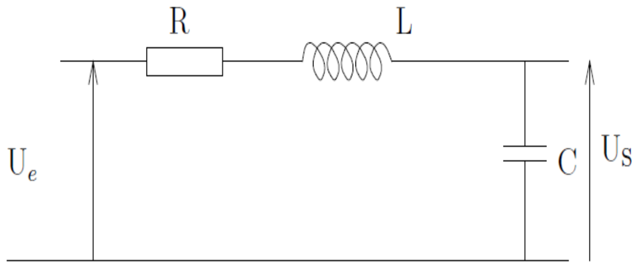


1) Déterminer la nature du filtre à partir de son comportement asymptotique.
2) En utilisant le théorème de Millman, déterminer la fonction de transfert en tension $H_2(jx)$ où $x = L\,\omega/R$, Préciser la pulsation de coupure.

7. Filtres du 2eme ordre

7.1. Filtre passe-bas d'ordre 2

- ✓ **Comportement asymptotique**



En haute fréquence, C se comporte comme un fil donc $H \to 0$ En basse fréquence, C se comporte comme un interrupteur ouvert et L comme un fil donc $H \to 1$. On a bien un comportement de filtre passe-bas.

- ✓ **Fonction de transfert**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On pose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}} \quad \textbf{ou} \quad \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

Plus généralement la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}} \quad \textbf{ou} \quad \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

On remplace parfois $1/Q$ par $2m$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0}}} \quad \textbf{ou} \quad \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + 2mjx}}$$

Son diagramme de Bode possède :

- ➢ une asymptote en BF : $G_{dB} = 20 \log H_0$
- ➢ une asymptote en HF de pente $-40\ dB/$décade
- ➢ une résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$.

- ✓ **Diagramme de Bode**

  - ❖ **Représentation de la courbe de gain**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \Longrightarrow H(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

$$G_{dB} = 20\log|\underline{H}(j\omega)| \Longrightarrow G_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}\right)$$

$$\Longrightarrow G_{dB} = 20\log 1 - 20\log\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}} = 0 - 10\log\left[(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{G_{dB} = -10\log\left[(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right]}}$$

- En basses fréquences : $x \longrightarrow 0$ alors $G_{dB} \cong 0$ demi-droite confondue avec l'axe des abscisses.
- En hautes fréquences : $x \longrightarrow \infty$ alors $G_{dB} \cong -10\log(x^4) \cong -40\log x$. C'est une droite de pente $-40\ dB/$décade, caractéristique du filtre de deuxième ordre.

Regardons si G_{dB} admet un maximum ; pour cela posons :

$$X = x^2 \quad \text{et} \quad f(X) = (1-X)^2 + \frac{X}{Q^2} = 1 + X^2 + X\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)$$

$$f'(X) = 0 \Longrightarrow X = 1 - \frac{1}{2Q^2} \quad \text{si} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- ✓ Si $Q < 1/\sqrt{2}$: G_{dB} ne présente pas de maximum (courbe décroissante)
- ✓ Si $Q > 1/\sqrt{2}$: G_{dB} présente un maximum en x_R:

$$x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \Longrightarrow H(x_R) = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \Longrightarrow G_{dBmax} = 20\log Q - 10\log\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$$

Le passe-bas est alors dit résonant (on choisit en général des Q de l'ordre de 0,5.

❖ Représentation de la courbe de phase

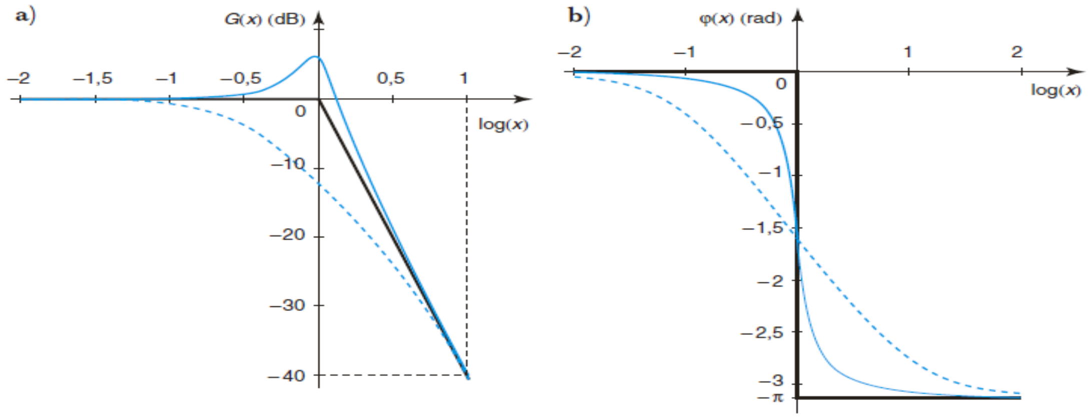
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \Longrightarrow \varphi = arg\underline{H}(j\omega) = arg\left(\frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\right)$$

$$\Longrightarrow \varphi = arg(1) - arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right) \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\varphi = -\arctan\left[\frac{x}{Q(1-x^2)}\right]}}$$

L'expression de ϕ dépend du signe de $1 - x^2$

$$\text{si} \quad 1 - x^2 > 0 \Longrightarrow \varphi = \arctan \frac{x}{Q(1 - x^2)}$$

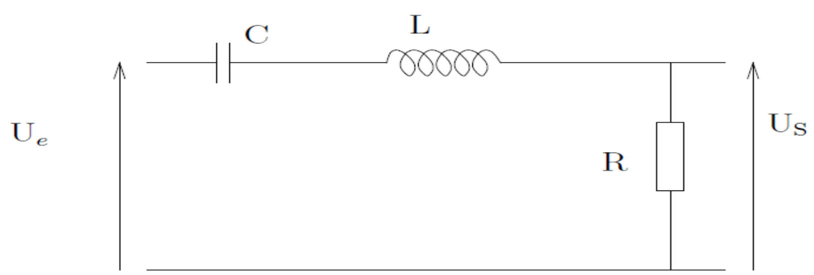
$$\text{si} \quad 1 - x^2 < 0 \Longrightarrow \varphi = \pi + \arctan \frac{x}{Q(1 - x^2)}$$



a) Courbe de réponse en gain (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).
b) Courbe de réponse en phase (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).
Courbes en traits pleins pour $Q = 2$, courbes en traits pointillés pour $Q = 0{,}25$.

7.2. Filtre passe-bande d'ordre 2

✓ Comportement asymptotique



En haute fréquence, L se comporte comme un interrupteur ouvert et C comme un fil donc $H \to 0$. En basse fréquence, L se comporte comme un fil et C comme un interrupteur ouvert donc $H \to 0$. L et C ayant des impedances finies à fréquence intermédiaire, on a bien un comportement de filtre passe-bande.

✓ Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{R}{R + jL\omega + j\dfrac{1}{C\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

On pose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1+\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{x}{Q}}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}}$$

Plus généralement la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du second ordre s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1+\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0\frac{jx}{Q}}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} = \frac{H_0\frac{jx}{Q}}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}}$$

On remplace parfois $1/Q$ par $2m$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0\frac{2mj\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0\frac{2mjx}{1-x^2+2mjx}}$$

Son diagramme de Bode possède :

- une asymptote en BF de pente $+20\ dB/$décade
- une asymptote en HF de pente $-20\ dB/$décade
- une intersection pour $\omega = \omega_0$ au point $20\log H_0 - 20\log Q$; le gain est alors maximal et vaut $20\log H_0$.
- Un pic de résonance de largeur ω_0/Q.

✓ **Diagramme de Bode**

❖ **Représentation de la courbe de gain**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow H(j\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$G_{dB} = 20\log\left|\underline{H}(j\omega)\right| \Rightarrow G_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20\log 1 - 20\log\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = 0 - 10\log\left[1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{dB} = -10\log\left[1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]}$$

- En basses fréquences : $x \longrightarrow 0$ alors $G_{dB} \cong -10\log(Q^2/x^2) = +20\log(x/Q)$. C'est une droite de pente $+20\ dB$/décade.
- En hautes fréquences : $x \longrightarrow \infty$ alors $G_{dB} \cong -10\log(Q^2x^2) = -20\log(xQ)$. C'est une droite de pente $-20\ dB$/décade.

La bande passante à -3 dB est définie par

$$|\underline{H}(j\omega)| = 1 \Rightarrow Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \\ x_2 = +\dfrac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$$

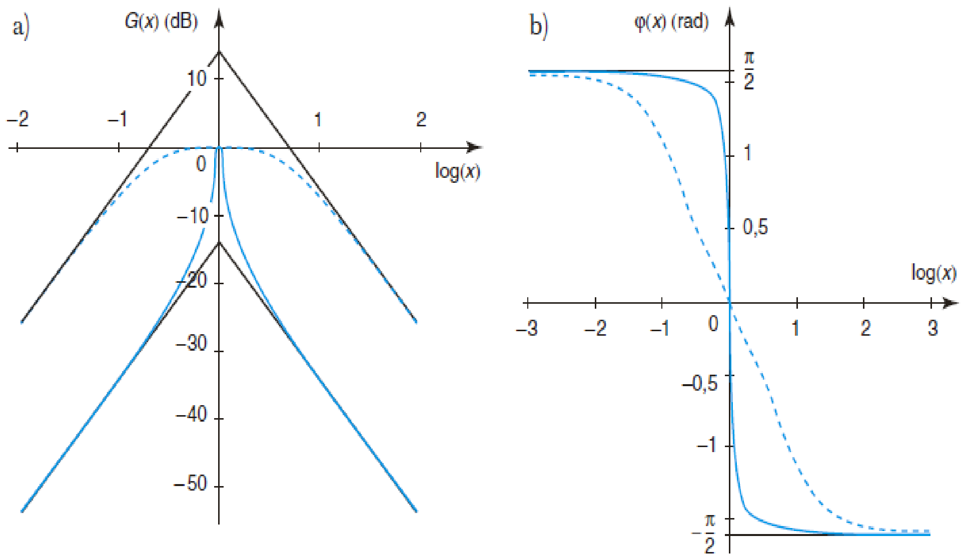
Plus Q est grand, plus le filtre est sélectif

❖ **Représentation de la courbe de phase.**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \varphi = arg\underline{H}(j\omega) = arg\left(\frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = arg(1) - arg\left[1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \Rightarrow \varphi = 0 - arg\left[1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]}$$



a) Courbe de réponse en gain (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).
b) Courbe de réponse en phase (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).
Courbes en traits pleins pour $Q = 0,2$; courbes en traits pointillés pour $Q = 5$.